

Документ подписан простой электронной подписью
 Информация о владельце:
 ФИО: Косенок Сергей Михайлович
 Должность: ректор
 Дата подписания: 20.06.2025 06:17:01
 Уникальный программный ключ:
 e3a68f3eaa1e62674b54f4998099d3d6bfdcf836

Оценочные средства для промежуточной аттестации по дисциплине

Линейные и нелинейные уравнения физики, семестр 7

Код, направление подготовки	03.03.02 физика
Направленность (профиль)	Цифровые технологии в геофизике
Форма обучения	очная
Кафедра-разработчик	Кафедра экспериментальной физики
Выпускающая кафедра	Кафедра экспериментальной физики

Типовые задания для контрольной работы:

- 1) Рассмотрите ангармонический осциллятор с затуханием, $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon x^5 = 0$, в пределе сильного затухания: $(\omega_0^2 / 4\beta^2) \ll 1$. Постройте приближенное решение, используя метод многих масштабов. Обратите внимание на то, что малым параметром здесь следует считать $\varepsilon_1 = \omega_0^2 / 4\beta^2$. Предварительно перейдите от размерного времени t к безразмерному (например, $\tau = \omega_0^2 t / 2\beta$).
- 2) Рассмотрите динамическую систему, описываемую уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x(\lambda_1 - \lambda_2 x - y), \\ \dot{y} = x\sqrt{1-y^2} + y^2 - 1, \\ |y| \leq 1, x \geq 0. \end{cases}$$

Исследуйте фазовый портрет этой системы; установите: а) наличие или отсутствие особых точек в зависимости от значений параметров; б) наличие бифуркаций, предельных циклов, и т.д.

- 3) Построить равномерно пригодное разложение первого порядка для уравнения $\ddot{x} + \omega_0^2 x - \varepsilon(1-x^4)\dot{x} = 0$, считая $\varepsilon \ll \omega_0$ (обратите внимание на то, что $[x]=1$). Использовать метод многих масштабов и метод усреднения.
- 4) Рассмотрите модель «хищник-жертва», в которой x и y - количество особей «жертв» и «хищников» соответственно: $\begin{cases} \dot{x} = \alpha(x)x - xy, \\ \dot{y} = xy - \mu y \end{cases}$, $\alpha(x) = a + bx - x^2$ (при $\alpha = \text{const}$ эта модель совпадает с моделью Лоттки – Вольтерра).

Покажите, что бифуркация Андронова – Хопфа возможна не при любых значениях постоянных a и b (NB: по своему смыслу коэффициент $\alpha(x) > 0$!). Каким должен быть характер функции $\alpha(x)$ для того, чтобы бифуркация была возможна? Постройте графики зависимостей $x(t)$ и $y(t)$ для нескольких выбранных значений параметров a, b и m .

- 5) Построить равномерно пригодное разложение второго порядка для осциллятора Дюффинга, $\ddot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon x^3 = 0$, $\varepsilon / \omega_0^2 \ll 1$, используя метод Линдштедта – Пуанкаре.
- 6) Рассмотрите т.н. автоколебательную систему с жестким возбуждением: $\ddot{x} - (\lambda + \varepsilon x^2 - x^4)\dot{x} + x = 0$. Исследуйте её фазовый портрет. Ответьте на следующие вопросы:
 - А) существует ли стационарная точка? Если да, то при каких значениях параметров она устойчива (проиллюстрировать графиком)?
 - Б) выяснить, имеются ли у этой системы предельные циклы (в каком диапазоне значений параметров?) и являются ли они устойчивыми (т.е. аттракторами).
 - В) Какие свойства системы, по вашему мнению, дали основание назвать ее системой с «жестким возбуждением»?
- 7) Используя метод многих масштабов и метод усреднения, построить равномерное по времени разложение первого порядка для уравнения $\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon \omega_0 x^3 = 0$, $\varepsilon \ll \omega_0$, $[x] = 1$.
- 8) Исследуйте фазовые портреты для динамической системы, задаваемой уравнениями (уравнения колебаний самолета):

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \rho - \cos \varphi, \\ \dot{\rho} = 2\rho(\lambda - \mu\rho - \sin \varphi). \end{cases}$$

Варьируя один из параметров, проверьте наличие в такой системе бифуркации Андронова – Хопфа (оцените порог бифуркации), а также установите диапазон параметров, в котором происходит рождение предельного цикла и его дальнейшая эволюция.

- 9) Найдите поправку (она может зависеть от амплитуды) к частоте линейных колебаний осциллятора, описываемого уравнением $\ddot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon x^5 = 0$. Используйте любой из асимптотических методов.

- 10) Исследуйте систему (описывающую колебания в гликолизе):

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - xy^\gamma, \\ \dot{y} = \alpha(xy^\gamma - y). \end{cases}$$

Варьируя параметры α и γ , установите, при каких значениях параметров в системе возникает бифуркация Андронова – Хопфа (бифуркация рождения предельного цикла). Как эволюционирует этот предельный цикл с ростом параметра α (γ)? Выводы подкрепить соответствующими графиками.

11) Рассмотрите уравнение $\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta \dot{x}^3 = 0$, $(\omega_0 \beta \ll 1)$. Используя метод многих масштабов и метод усреднения построить равномерно пригодное разложение первого порядка для функции $x(t)$ [введите безразмерное время $\tau = \omega_0 t$ и используйте малость параметра $\varepsilon = (\omega_0 \beta)^{-1} \ll 1$].

12) Рассмотрите динамическую систему (Лоренца):

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

при $r = 5, 12, 13.927, 20, 24.06, 28$ и $\sigma = 10, b = 8/3$. Проанализируйте результаты и ответьте на следующие вопросы:

А) имеют ли место бифуркации в этой системе?

Б) чему равно пороговое значение параметра бифуркации? (дайте оценку)

В) при каких значениях σ и b данная система является консервативной? Гамильтоновой?

13) Используя метод усреднения, построить равномерно пригодное разложение первого порядка для функции $x(t)$, удовлетворяющей уравнению $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \varepsilon[\omega_0 \dot{x}(t)(1 - \lambda \dot{x}^2(t)) + \dot{x}^2(t)x(t)]$, $\varepsilon \ll 1$.

14) Изучите поведение фазовых траекторий для генератора Кислова – Дмитриева, описываемого системой уравнений

$$\begin{cases} T\dot{x} + x = Mze^{-z^2}, \\ \dot{y} = x - z, \\ \dot{z} = y - \frac{z}{Q}. \end{cases}$$

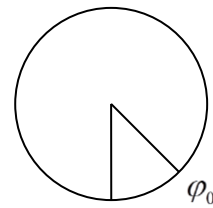
Установите (с некоторой вероятностью) наличие или отсутствие предельных циклов при $T=1$ и $Q=10$ (M - управляющий параметр) и стационарных точек. Дайте соответствующие графические изображения. Как проявляется на графиках симметрия системы Кислова – Дмитриева по отношению к одновременному изменению знаков всех трех координат?

15) Исследовать поведение фазовых траекторий системы Лоттки – Вольтерра

$$\begin{cases} \dot{x} = (a - b y)x, \\ \dot{y} = (-c + d x)y, \end{cases} \quad a, b, c, d > 0.$$

Найти характеристические показатели Ляпунова и сделать вывод о характере стационарной точки. Получить аналитическое выражение для интегральных кривых на фазовой плоскости (то есть найти уравнение вида $F(x, y) = 0$ для фазовых траекторий).

- 16) Тонкая проволока в форме окружности радиуса R вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, лежащей в плоскости окружности и проходящей через её центр. По проволоке без трения может скользить бусинка. При некотором значении $\omega = \omega_c$ бусинка покидает нижнее положение равновесия и переходит в новое (угол $\varphi = \varphi_0$). Получите уравнение движения бусинки и на его основе определите стационарные точки и значение критической частоты ω_c . На фазовой плоскости построить фазовые портреты для случаев $\omega < \omega_c$ и $\omega > \omega_c$, указав на нем расположение характерных точек, сепаратрис и т.д. Построить график зависимости периода колебаний от энергии для случая $\omega > \omega_c$ [здесь можно использовать переменные действие-угол либо (что более трудоемко) построить временные зависимости угла $\varphi(t)$ при разных начальных данных и по ним вычислить период].



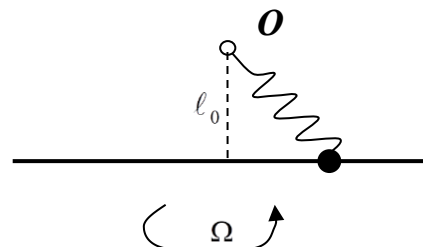
- 17) Исследовать, при каких значениях параметров a и b динамическая система, описываемая уравнениями
$$\begin{cases} \dot{x} = a - (b+1)x + x^2 y, \\ \dot{y} = bx - x^2 y \end{cases}$$
, имеет устойчивую стационарную точку. Найти эти стационарные решения. Определить тип стационарной точки.
- 18) Исследуйте систему Ресслера:

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y+z), \\ \dot{y} = x + ay, \\ \dot{z} = b + z(x-c) \end{cases}$$

для $b = 2$, $c = 4$ и различных значений a . Имеются ли у этой системы аттракторы (при каких значениях a)? Постройте проекции нескольких фазовых траекторий на координатные плоскости и дайте их 3-мерное изображение. Имеются ли в фазовом пространстве стационарные точки и, если да, каковы их координаты?

- 19) Найти равномерно пригодное разложение второго порядка для уравнения $\ddot{x} + \omega^2 x + \varepsilon x^2 + \varepsilon \dot{x}^2 = 0$ ($\varepsilon \ll 1$). Является ли рассматриваемая система гамильтоновой?

- 20) Динамическая система представляет собой шарик, перемещающийся без трения по горизонтальной спице. Шарик прикреплен к легкой пружине, второй конец которой закреплен шарнирно в точке O , находящейся на расстоянии ℓ_0 от спицы. Спица приводится во вращение с угловой скоростью Ω вокруг вертикальной оси, проходящей через точку O . Жёсткость пружины - k , масса шарика - m , длина нерастянутой пружины совпадает с ℓ_0 . Получить уравнения движения динамической системы. Исследовать её фазовые портреты при различных значениях Ω . Указать



положение и характер особых точек на фазовой диаграмме. Установить наличие бифуркационных значений параметра Ω и их физический смысл.

- 21) Построить равномерно пригодное разложение второго порядка для уравнения $\ddot{x} + \omega^2 x + \varepsilon^2 x^3 + \varepsilon \dot{x}^2 = 0$ ($\varepsilon \ll 1$).
- 22) Исследуйте динамическую систему, описываемую уравнением $\ddot{x} + \omega^2 x - (\varepsilon + \cos(x))\dot{x} = 0$, рассматривая параметр ε в качестве управляющего параметра. Постройте фазовые портреты для различных значений ε . Определите характер динамической системы, критические значения параметра ε и их физический смысл.
- 23) При условии, что расстройка частоты имеет второй порядок по ε , постройте резонансные кривые для осциллятора с квадратичной нелинейностью при наличии внешнего гармонического воздействия:

$$\ddot{x} + 2\varepsilon^2 \beta \dot{x} + x + \varepsilon x^2 = \varepsilon^2 f \cos \omega t.$$

- 24) Исследуйте отображение $x_{n+1} = \lambda \cos x_n$. Постройте диаграммы Ламерея, найдите стационарные решения и циклы нескольких низших размерностей, а также соответствующие им критические значения управляющего параметра.

Типовые вопросы к зачёту с оценкой:

Круг задач и примеры линейных и нелинейных систем	
1.	Примеры линейных уравнений физики из теории цепей, акустики, электродинамики.
2.	Нелинейная физика и нелинейные дифференциальные уравнения. Общие и частные методы решения линейных и нелинейных уравнений (сопоставление). Источники нелинейности.
3.	Примеры физических систем, описываемых нелинейными ДУ. Уравнения Бюргерса, Кортевега – де-Фриза, система Лоренца.
Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний	
4.	Теория возмущений. Разложение по малому параметру (прямой метод). Секулярные члены и определение области применимости разложения.
5.	Метод перенормировки и метод Линдштедта - Пуанкаре на примере осциллятора Дюффинга. Эффекты ангармонизма при колебании математического маятника в поле тяжести.
6.	Метод многих масштабов в применении к системе Дюффинга.
7.	Разделение быстрых и медленных движений. Метод усреднения в применении к осциллятору Дюффинга.
8.	Точное решение для осциллятора Дюффинга. Эллиптический интеграл и его свойства. Сопоставление точного и приближенного решений.
9.	Общее рассмотрение одномерных нелинейных колебаний. Переменные действие-угол и интегрируемость.
10.	Теория возмущений для линейного гармонического осциллятора с затуханием. Сопоставление прямого разложения с точным решением. Особенности применения методики Линдштедта – Пуанкаре к ЛГО с затуханием.

11. Метод многих масштабов и метод усреднения в применении к ЛГО с затуханием.
Системы с самовозбуждением. Автоколебания
12. Нелинейные колебания с самовозбуждением. Уравнения Рэля и Ван-дер-Поля. Сравнение системы Ван-дер-Поля и ЛГО с затуханием.
13. Прямой метод и метод Линдштедта – Пуанкаре в применении к системе Ван-дер-Поля.
14. Вынужденные колебания в нелинейных системах на примере осцилляторов Дюффинга и Ван-дер-Поля. Связь характера нелинейности со спектральной характеристикой отклика.
15. Прямой метод и метод вариации постоянных в применении к системе Ван-дер-Поля. Характерные особенности поведения осциллятора Ван-дер-Поля при $t \rightarrow \infty$. Пороговый характер возникновения автоколебаний. Бифуркация Андронова – Хопфа.
Основы теории динамических систем
16. Динамические системы. Гамильтоновы системы. Фазовое пространство. Необходимое условие «гамильтоновости» динамических систем и теорема Лиувилля.
17. Автономные и неавтономные динамические системы. Исследование устойчивости решений (общая постановка задачи). Примеры автономных систем и способы приведения неавтономных систем уравнений к «автономному» виду.
18. Устойчивость по Ляпунову. Показатели Ляпунова. Фазовые потоки, их свойства и разновидности. Инвариантные множества оператора эволюции автономных систем. Аттракторы. Понятие о «странных» аттракторах. Примеры
19. Двумерные автономные фазовые потоки. Классификация особых точек. Критерий возникновения бифуркации «фокус-седло».
20. Система Лоттки – Вольтерра и ее свойства в зависимости от значений управляющих параметров.
21. Система Лоренца и ее моделирование в различных диапазонах значений параметров.
Метод дискретных отображений в теории динамических систем
22. Теорема А. Пуанкаре «о возврате». Отображение Пуанкаре для гамильтоновых систем. Функция последования и ее свойства. Бифуркация удвоения периода.
23. Дискретные отображения и их использование в теории динамических систем. Диаграммы Ламерея. Примеры отображений.
24. Особые точки дискретных отображений. Удвоение периода, хаос и универсальность Фейгенбаума.
25. Двумерные отображения. Эргодичность и перемешивание (примеры отображений).